

**Proje Ana Alanı : MATEMATİK**

**Proje Tematik Alanı : ALGORİTMA/MANTIKSAL TASARIM**

**Proje Adı (Başlığı) : KENARLARI TAMSAYI OLAN DİK ÜÇGENLER OLUŞTURMA**

Sınırlı sayıda bilinen dik üçgenlerin yerine, sonsuz tane kenarları tamsayı olan dik üçgen oluşturma algoritması oluşturuldu.

### **Özet:**

Projede Ortaokul ve Lise Eğitimi boyunca sıklıkla karşılaşılan ve sınırlı sayıda elemanı kullanılan kenarları tamsayı olan dik üçgenler kümesi incelendi. Dik Üçgenlerde kullanılan Pisagor Teoremi yardımıyla elde edilen iki kare farkından yola çıkılarak, kenarları tamsayı yapacak şekilde seçilecek, şartlara uygun iki tamsayı yardımıyla sonsuz tane istenen modelde dik üçgen oluşturabileceği gösterildi. Elde edilen eşitlikler Excel Programında kullanıldı ve Kenarları tamsayı olan bazı dik üçgenler tablo yardımıyla örneklendirildi. Eşitliğin bir çok dik üçgen çeşidi elde etmede kullanılabileceği ve üçgen modelleri oluşturulabileceği belirtildi.

### **Anahtar kelimeler:**

#### **Amaç**

Lise eğitiminde hem konu anlatımında de hem de soru geliştirmede sıklıkla kullanılan, kenarları tamsayı olan 3-4-5, 5-12-13, 7-24-25, 8-15-17 gibi sonsuz tane dik üçgen elde edilmesini sağlayacak algoritma amaçlandı.

#### **Giriş**

Projemizde öğrenim hayatımız boyunca, hem Ortaokul Eğitimi'nde hem de Lise Eğitimi'nde sıklıkla kullandığımız Pisagor teoreminden yola çıkarak, "bilinen ve ezberlenen kenarları tamsayı olan dik üçgenlerden farklı dik üçgenlerde var mıdır?" sorusuna cevap bulmaya çalışıldı.

#### **Yöntem**

Dik üçgenlerde kullandığımız Pisagor Teoreminden faydalanarak iki kare farkı özdeşliği elde edildi. İki kare farkındaki çarpanlar, hedeflenen şartlara uygun tamsayılara eşitlendi. Kenarları tamsayı olan ve Pisagor teoremine uygun üçgenler modellendi. Bulunan eşitlikler yardımıyla, projeyi örneklendirecek Excel tablosu oluşturuldu.

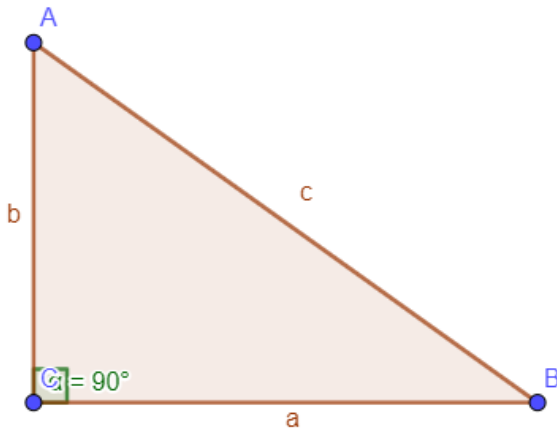
## Proje İş-Zaman Çizelgesi

**Tablo 1:** İş- Zaman Çizelgesi

AYLAR										
İşin	Nisan	Mayıs	Haziran	Temmuz	Ağustos	Eylül	Ekim	Kasım	Aralık	Ocak
Literatür Taraması						Yapıldı	Yapıldı			
Arazi Çalışması										
Verilerin Toplanması ve Analizi								Yapıldı	Yapıldı	
Proje Raporu Yazımı										Yapıldı

### Bulgular

**Pisagor teoremi** (Modern Yunanca: Πυθαγόρειο θεώρημα) veya **Pisagor bağıntısı**, Öklid geometrisinde üçgenin kenarları arasındaki temel ilişkiyi kuran ilk teoremlerden biridir. Teoreme gerçek hayattan örnek olarak telli çalgıları gösterebiliriz; 'telin uzunluğu arttıkça titreşim artar' prensibine dayanır. **Pisagor'un denklemleri** olarak da isimlendirilen bu teorem,  $a$ ,  $b$  ve  $c$  kenarlarının arasındaki ilişki şu şekilde açıklar: (1)  $a^2 + b^2 = c^2$ . Burada  $c$  hipotenüsün uzunluğunu,  $a$  ve  $b$  üçgenin diğer iki tarafının uzunluklarını temsil eder. Tarihî anlamda çok tartışılan teorem, adını eski Yunan filozof ve matematikçi Pythagoras'dan (Πυθαγόρας, MÖ 570 – MÖ 495) almıştır.



**Şekil 1:** Dik Üçgen

Pisagor Teoreminde verilen eşitlikte her iki tarafa  $-b^2$  eklersek,  $a^2 = c^2 - b^2$  eşitliği elde edilir. İki kare farkı özdeşliğini kullandığımızda  $a^2 = (c-b).(c+b)$  olur.  $k \in \mathbb{N}^+$  ve  $m \in \mathbb{N}^+$  olacak şekilde ve toplamları çift sayı olacak  $k$  ve  $m$  sayıları seçilirse;  $c-b = k^2$  ve  $c+b = m^2$  şeklinde kabul

edelim. Buradan  $c = \frac{m^2 + k^2}{2}$  eşitliği ve  $b = \frac{m^2 - k^2}{2}$  eşitliği elde edilir. Buradan  $a = k.m$  elde edilir.

$k \in \mathbb{N}^+$  ve  $m \in \mathbb{N}^+$  olacak şekilde ve toplamları çift sayı olacak  $k$  ve  $m$  sayıları seçtiğimizde, verilen eşitlikler yardımıyla kenarları tamsayı olan dik üçgenler elde edilir. Seçilen şartlara uygun sonsuz tane  $k$  ve  $m$  sayıları seçilebileceği için, kenarları tamsayı olan sonsuz tane dik üçgen olduğuda ispatlanmış olur. Elde edilen eşitlikler yardımıyla kurulan Excel tablosunda, şartlara uygun  $k$  ve  $m$  sayıları seçtiğimizde oluşan bazı dik üçgenler aşağıdaki tabloda gösterilmiştir

:

Pozitif Tamsayılar		Dik Kenar	Dik Kenar	Hipotenüs
m	k	a	b	c
11	7	77	36	85
27	15	405	252	477
37	29	1073	264	1105
13	5	65	72	97
3	1	3	4	5
5	3	15	8	17
7	3	21	20	29
7	5	35	12	37
5	1	5	12	13
23	11	253	204	325
17	5	85	132	157
131	97	12707	3876	13285

**Tablo 2:** Kenarları Tamsayı olan Bazı Özel Dik Üçgenler

## Sonuç ve Tartışma

Bulunan eşitlik yardımıyla, Ortaokul ve Lise Eğitimi'nde sıklıkla kullanılan ve ezbere bilinen özel dik üçgenlere ek dik üçgenler kullanılabilir. Öğrencilerin 3-4-5, 5-12-13, 7-24,25, 8-15,17 üçgelerinin genel mantığını anlaması da sağlanabilir. Yeni üçgen çeşitleri ve isimleri, daha birçok farklı sonuçlar bu eşitlikler yardımıyla bulunabilir.

## Öneriler

Matematik ve Geometri tarihi boyunca bir çok üçgen çeşidi incelenegelmiştir. **Kepler üçgeni**, kenarları geometrik dizi oluşturan bir dik üçgen. Kepler üçgeninin kenarları altın oranla

ilişkilidir; kenar uzunlukları ya da yaklaşık olarak **1 : 1,272 : 1,618** ile

orantılıdır.(2) Kenar uzunluklarının kareleri (şekilde gösterildiği gibi), aralarında altın oran bulunacak şekilde, geometrik dizi oluşturur.

Bu orana sahip üçgenler adını, üçgenin kısa kenarıyla hipotenüsü arasında altın oran olduğunu tespit ederek, özelliklerini tanımlayan ilk isim olan Alman matematikçi Johannes Kepler'den almıştır(3)

Kenarları ve alanı rasyonel sayı olan Heron Üçgeni (4) gibi üçgen çeşitleri incelenmiştir. Pisagor teoremi ile elde edilecek iki kara farkı özdeşliği yardımı ile de daha bir çok üçgen çeşidi bulunabilir ve isimlendirebilir.

Ayrıca çemberde çapı gören çevre açısı  $90^\circ$  olması sebebiyle, bulunan bu eşitlik çemberde de kullanılabilir. Burdan da farklı giriş ve çap ilişkileri elde edilebilir.

### **Kaynaklar**

- (1) Judith D. Sally; Paul Sally (2007). "Chapter 3: Pythagorean triples".
- (2) Roger Herz-Fischler (2000). *The Shape of the Great Pyramid*.
- (3) Livio, Mario (2002). *The Golden Ratio: The Story of Phi, The World's Most Astonishing Number*
- (4) "[Heron's Formula](#)". Mathworld.